

不分明化集类

邱道文

广东工业大学数理系, 广州, 510090

摘要 给出了不分明化环(代数)、 σ -环(σ -代数)和单调类的定义, 并得到了其基本性质.

关键词 模糊逻辑; 环, σ -环; 单调类

中图资料法分类号 O159; O144; O141

用模糊逻辑的语义可建立不分明化拓扑空间^[1], 它从新的角度研究了模糊拓扑. 众所周知, 环(代数)、 σ -环(σ -代数)和单调类是测度论的基础^[2], 因为测度就定义其上. 虽然讨论较多的模糊测度是定义于经典集类上的非可加测度^[3], 但 Butnariu^[4]对模糊集类上的可加模糊测度作过较系统的研究. 本文用模糊逻辑的语义建立了不分明化环(σ -环)、代数(σ -代数)和单调类, 且讨论了其基本性质. 关于不分明化集类上的测度我们将另文给出. 文中的逻辑符号取自文^[1].

1 F 环和F 代数

定义 1.1 设 X 非空(文中所指 X 皆非空), 称 $R \in \text{云}(P(X))$ 为 F 环, 若满足:

(N1) $R(\emptyset) = 1$;

(N2) 任意 $E_1, E_2 \in \text{孕}(X)$, 有

$$R(E_1) \wedge R(E_2) \leq R(E_1 \cup E_2) \wedge R(E_1 - E_2) \wedge R(E_2 - E_1)$$

若 R 还满足 (N3) $R(X) = 1$, 则称之为 F 代数.

从定义 1.1 我们可得到以下断言:

命题 1.2 ① R 是 F 代数, 则 $R(E) \leq R(X \setminus E)$;

② R 为 F 环, 则 $R(E_1) \wedge R(E_2) \leq R(E_1 \cap E_2)$ 和 $\inf_{i=1}^n R(E_i) \leq R(\bigcup_{i=1}^n E_i)$, 其中 $E_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为 X 子集;

③ R_1 与 R_2 为 F 环, 则 $R = R_1 \cap R_2$ 也是 F 环(代数), 其中 $R(E) = R_1(E) \wedge R_2(E)$;

④ $i \in I$ 时, R_i 为 F 环(代数), I 为指标集, 则 $\bigcap_{i \in I} R_i$ 也是 F 环(代数).

证明: 只要注意到 $E_1 \cap E_2 = (E_1 \cup E_2) - (E_1 - E_2) - (E_2 - E_1)$,

命题皆可直接证明, 我们仅以④为例:

首先, $(\bigcap_{i \in I} R_i)(\emptyset) = \inf_{i \in I} R_i(\emptyset) = 1$; 其次, 我们有

$$\begin{aligned} (\bigcap_{i \in I} R_i)(E_1) \wedge (\bigcap_{i \in I} R_i)(E_2) &= (\inf_{i \in I} R_i(E_1)) \wedge (\inf_{i \in I} R_i(E_2)) \\ &= (\inf_{i \in I} (R_i(E_1) \wedge R_i(E_2))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (\inf_{i \in I} (R_i(E_1 \cup E_2) \wedge R_i(E_1 - E_2) \wedge R_i(E_2 - E_1))) \\
&= (\inf_{i \in I} R_i(E_1 \cup E_2)) \wedge (\inf_{i \in I} R_i(E_1 - E_2)) \wedge (\inf_{i \in I} R_i(E_2 - E_1)) \\
&= (\bigcap_{i \in I} R_i)(E_1 \cup E_2) \wedge (\bigcap_{i \in I} R_i)(E_1 - E_2) \wedge (\bigcap_{i \in I} R_i)(E_2 - E_1)
\end{aligned}$$

以及 $(\bigcap_{i \in I} R_i)(X) = \inf_{i \in I} R_i(X)$, 故命题成立.

定理 1.3 设 $\mathcal{R} \in \text{云}(\mathcal{P}(X))$, $\epsilon \in (0, 1)$, 则存在唯一 F 环(代数) $R_\epsilon(\mathcal{R})$ 满足:

① $[\mathcal{R} \sqsubset R_\epsilon(\mathcal{R})] \geq \epsilon$;

② 若有 F 环(代数) R 满足 $[\mathcal{R} \sqsupset \mathcal{R}] \geq \epsilon$, 则

$[R_\epsilon(\mathcal{R}) \sqsubset R] = 1$.

证明: 作 $\mathcal{C} = \{R \mid [\mathcal{R} \sqsupset \mathcal{R}] \geq \epsilon, R \text{ 是 } F \text{ 环(代数)}\}$, 由于 $[\mathcal{R} \sqsupset \mathcal{R}] = 1 \geq \epsilon$, 可知 $\mathcal{C}$ 非空. 令

$R_\epsilon(\mathcal{R}) = \bigcap \{R \mid R \in \mathcal{C}\}$, 由命题 1.1④知 $R_\epsilon(\mathcal{R})$ 是 F 环(代数), 且有

$$[\mathcal{R} \sqsupset R_\epsilon(\mathcal{R})] = \inf_{(A) \in \mathcal{P}(X)} \min(1 - \mathcal{R}(A) + R_\epsilon(\mathcal{R})(A), 1)$$

$$= \inf_{A \in \mathcal{P}(X)} \min(1 - \mathcal{R}(A) + \inf \{R(A) \mid R \in \mathcal{C}\}, 1)$$

$$= \inf \{ \inf_{A \in \mathcal{P}(X)} \min(1 - \mathcal{R}(A) + R(A), 1) : R \in \mathcal{C} \}$$

$$= \inf \{ [\mathcal{R} \sqsubset R] : R \in \mathcal{C} \} \geq \epsilon, \text{ 因此 ① 成立. 若有 } F \text{ 环(代数) } R' \text{ 满足 } [\mathcal{R}' \sqsupset \mathcal{R}] \geq \epsilon,$$

则 $R' \in \mathcal{C}$, 因而 $[\mathcal{R}' \sqsupset R_\epsilon(\mathcal{R})] = 1$. 往证唯一性: 若有 $R'_\epsilon(\mathcal{R})$ 满足 ① 和 ②, 则 $[\mathcal{R}'_\epsilon(\mathcal{R}) \sqsupset R_\epsilon(\mathcal{R})] = [\mathcal{R}'_\epsilon(\mathcal{R}) \sqsupset R'_\epsilon(\mathcal{R})] = 1$, 故结论成立.

2 $F\sigma$ -环和 $F\sigma$ -代数

定义 2.1 称 $R^\sigma \in \text{云}(\mathcal{P}(X))$ 为 $F\sigma$ -环, 若满足:

(M1) $R^\sigma(\emptyset) = 1$;

(M2) $E_i \in \mathcal{P}(X)$, $i \in N$ 时, $\inf_{i=1}^{\infty} R^\sigma(E_i) \leq R^\sigma(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$;

M3 $R^\sigma(E_1) \wedge R^\sigma(E_1 - E_2) \wedge R^\sigma(E_2 - E_1)$.

若 R^σ 还满足 (M4) $R^\sigma(X) = 1$, 则称之为 $F\sigma$ -代数.

显然, $F\sigma$ -环(σ -代数)必为 F 环(代数), 且易知下列命题:

命题 2.2 R^σ 为 $F\sigma$ 环(σ -代数), 则

① $\inf_{i=1}^{\infty} R^\sigma(E_i) \leq R^\sigma(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i)$;

② $\inf_{i=1}^{\infty} R^\sigma(E_i) \leq R^\sigma(\lim_{i \rightarrow \infty} E_i) \wedge R^\sigma(\overline{\lim_{i \rightarrow \infty} E_i})$.

证明: ① 设 $\inf_{i=1}^{\infty} R^\sigma(E_i) > t$, 则由 (M2) 和 (M3) 知 $R^\sigma(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$ 和 $\inf_{i=1}^{\infty} R^\sigma(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i - E_i) \geq t$ 因

而

$$R^\sigma(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = R^\sigma(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i - \bigcup_{j=1}^{\infty} (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i - E_i)) \geq t \wedge t = t;$$

② 因为 $\lim_{i \rightarrow \infty} E_i = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, $\overline{\lim_{i \rightarrow \infty} E_i} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 故由 (M2) 和 ① 知 $\inf_{i=1}^{\infty} R^\sigma(E_i) \leq R^\sigma(\lim_{i \rightarrow \infty} E_i) \wedge$

$R^\sigma(\overline{\lim_{i \rightarrow \infty} E_i})$

引理 2.3 设 R_i^σ 是 $F\sigma$ -环(σ -代数), $i \in I$, I 为指标集, 则 $\bigcap_{i \in I} R_i^\sigma$ 为 $F\sigma$ -环(σ -代数),

证明是直接的, 此略.

定理 2.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{C}(P(X))$, $\epsilon \in (0, 1)$, 则存在唯一 $F\sigma$ -环 (σ -代数) $R_\epsilon^\sigma(\mathcal{A})$ 满足:

① $[\mathcal{A} \subset R_\epsilon^\sigma(\mathcal{A})] \geq \epsilon$;

② 任意 $F\sigma$ -环 (σ -代数) R^σ , 若 $[R^\sigma \supset \mathcal{A}] \geq \epsilon$, 则 $[R^\sigma \supset R_\epsilon^\sigma(\mathcal{A})] = 1$.

证明完全类似于定理 1.3, 此略.

命题 2.5 $\epsilon \in (\frac{1}{2}, 1)$ 且 $[\mathcal{A} \subset \mathcal{A}] \geq \epsilon$, 则

① $[R_{2\epsilon-1}(\mathcal{A}) \subset R_\epsilon(\mathcal{A})] = 1$;

② $[R_{2\epsilon-1}^\sigma(\mathcal{A}) \subset R_\epsilon^\sigma(\mathcal{A})] = 1$.

证明: ① 由 $1 = (A \subset B) \wedge (B \subset C) \rightarrow (A \subset C)$ 可知 $[R_\epsilon(\mathcal{A}) \supset \mathcal{A}] \geq \max([\mathcal{A} \subset \mathcal{A}] + [R_\epsilon(\mathcal{A}) \supset \mathcal{A}] - 1, 0) \geq 2\epsilon - 1$

因此据定理 1.3 ② 有 $[R_{2\epsilon-1}(\mathcal{A}) \subset R_\epsilon(\mathcal{A})] = 1$.

同理可证 ②.

推论 2.6 $\epsilon \in (\frac{1}{2}, 1)$, $\mathcal{A} \in \mathcal{C}(P(X))$, 则有

$$[R_\epsilon^\sigma(\mathcal{A}) \supset R_\epsilon(R_\epsilon(\mathcal{A}))] = 1 \text{ 和 } [R_{2\epsilon-1}^\sigma(\mathcal{A}) \subset R_\epsilon^\sigma(R_\epsilon(\mathcal{A}))] = 1.$$

证明: 因为 $[R_\epsilon^\sigma(\mathcal{A}) \supset R_\epsilon(\mathcal{A})] \geq \epsilon$, 所以由定理 1.3 ② 有 $[R_\epsilon^\sigma(\mathcal{A}) \supset R_\epsilon(\mathcal{A})] = 1$, 又根据定理 2.4 ② 知

$$[R_\epsilon^\sigma(\mathcal{A}) \supset R_\epsilon^\sigma(\mathcal{A})] = 1.$$

另一方面, 因为 $[\mathcal{A} \subset R_\epsilon(\mathcal{A})] \geq \epsilon$, 据命题 2.5 ② 知 $[R_{2\epsilon-1}^\sigma(\mathcal{A}) \subset R_\epsilon^\sigma(\mathcal{A})] = 1$.

3 F 单调类

定义 3.1 称 $\mathcal{A} \in \mathcal{C}(P(X))$ 为 F 单调类, 若满足:

(P1) 任意 $E_i \in \mathcal{A}$, $i \in N$, 且 $\{E_i\}$ 是单调序列, 即 $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ 或 $E_1 \supset E_2 \supset \dots$. 有

$$\inf_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}(E_i) \leq \mathcal{A}(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n);$$

$$(P2) \mathcal{A}(\emptyset) = 1.$$

命题 3.2 设 $i \in I$, $\mathcal{A}_i$ 是 F 单调类, I 为指标集则 $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ 是 F 单调类.

证明是显然的, 此略.

定理 3.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{C}(P(X))$, $\epsilon \in (0, 1)$, 则存在唯一 F 调类 $\mathcal{A}_\epsilon(\mathcal{A})$ 使得:

① $[\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\epsilon(\mathcal{A})] \geq \epsilon$;

② 任意 F 单调类 $\mathcal{A}$ 若 $[\mathcal{A} \supset \mathcal{A}] \geq \epsilon$, 则

$$[\mathcal{A} \supset \mathcal{A}_\epsilon(\mathcal{A})] = 1$$

证明类似于定理 1.3, 此略.

引理 3.4 ① $F\sigma$ -环 R^σ 是 F 单调类; ② F 单调环 R (即满足 (P2)、(N1)、(N2)、(N3)) 是 F 环.

证明: ① 是直接的.

② 只要证明 $\inf_{i=1}^{\infty} R(E_i) \leq R(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$. 事实上, 设 $\inf_{i=1}^{\infty} R(E_i) > t$, 令 $F_n = \bigcup_{i=1}^n E_i$, 由 (N2) 和 (P2)

知

$$\inf_{i=1}^{\infty} R(E_n) \geq t \text{ 和 } R(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n) \geq t \quad \text{而}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 故 $R(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \geq t$, 因此结论成立.

引理 3.5 酞为 F 单调类, $A \in \text{孕}(X)$, 令

$$\eta_m^A(B) = \begin{cases} \text{酞}(B) \wedge \text{酞}(A - B) \text{酞}(B - A) \wedge \text{酞}(A \cup B), & B \neq \emptyset; \\ 1, & \end{cases}$$

则, η_m^A 为 F 单调类.

证明: 设 $\{B_n\}$ 是单调序列, 则

$$\begin{aligned} \inf_{n=1}^{\infty} \eta_m^A(B_n) &= \inf_{n=1}^{\infty} (\text{酞}(B_n) \wedge \text{酞}(B_n - A) \wedge \text{酞}(A - B_n) \wedge \text{酞}(A \cup B_n)) \\ &\leq \text{酞}(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n) \wedge \text{酞}(A - \lim_{n \rightarrow \infty} B_n) \wedge \text{酞}(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n - A) \wedge \text{酞}(A \cup \lim_{n \rightarrow \infty} B_n) \\ &= \eta_m^A(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n) \quad \text{故结论成立.} \end{aligned}$$

引理 3.6 设 R 为 F 环, $\epsilon \in (0, 1)$ 且 $E \in \text{孕}(X)$ 时, 有 $[\eta_{\text{酞}_\epsilon}^E \equiv \text{酞}_\epsilon(R)] = 1$, 这里 $\text{酞}_\epsilon = \text{酞}_\epsilon(R)$, 则 $\text{酞}_\epsilon(R)$ 为 F 环.

证明: 设 $F_1, F_2 \in \text{孕}(X)$, 则 $[\eta_{\text{酞}_\epsilon}^{F_1} \equiv \text{酞}_\epsilon(R)] = 1$ 和 $[\eta_{\text{酞}_\epsilon}^{F_2} \equiv \text{酞}_\epsilon(R)] = 1$, 因而有

$$\begin{aligned} \text{酞}_\epsilon(R)(F_1) \wedge \text{酞}_\epsilon(R)(F_2) &= \eta_{\text{酞}_\epsilon}^{F_1}(F_1) \wedge \eta_{\text{酞}_\epsilon}^{F_2}(F_2) \\ &= \text{酞}_\epsilon(R)(F_1) \wedge \text{酞}_\epsilon(R)(F_2) \wedge \text{酞}_\epsilon(R)(F_1 - F_2) \wedge \text{酞}_\epsilon(R)(F_2 - F_1) \wedge \text{酞}_\epsilon(R)(F_1 \cup F_2) \\ &\leq \text{酞}_\epsilon(R)(F_1 - F_2) \wedge \text{酞}_\epsilon(R)(F_2 - F_1) \wedge \text{酞}_\epsilon(R)(F_1 \cup F_2). \end{aligned}$$

$\text{酞}_\epsilon(R)(\emptyset) = 1$ 是显然的.

定理 3.7 设 R 是 F 环, $\epsilon \in (0, 1)$, $E \in \text{孕}(X)$ 时

$$[\eta_m^E \equiv \text{酞}_\epsilon(R)] = 1, \text{ 则 } [R_\epsilon^\sigma(R) \equiv \text{酞}_\epsilon(R)] = 1$$

证明: 因为 $[R_\epsilon^\sigma(R) \supset R] \geq \epsilon$, 又由引理 3.4①知

$R_\epsilon^\sigma(R)$ 是 F 单调类, 所以据定理 3.3②有

$$[R_\epsilon^\sigma(\text{粤}) \supset \text{酞}_\epsilon(\text{粤})] = 1;$$

另一方面, 由引理 3.6 知 $\text{酞}_\epsilon(R)$ 是 F 单调环, 据引理 3.4②知 $\text{酞}_\epsilon(R)$ 是 $F\sigma$ -环, 由于 $[\text{酞}_\epsilon(R) \supset R] \geq \epsilon$, 故由定理 2.4②得 $[\text{酞}_\epsilon(R) \supset R_\epsilon^\sigma(R)] = 1$, 定理证毕.

推论 3.8 酞是 F 单调类, R 是 F 环, $\epsilon \in (0, 1)$, 且 $[\text{酞} \supset R] \geq \epsilon$, 若 $[\eta_{\text{酞}_\epsilon}^E \equiv \text{酞}_\epsilon(R)] = 1$, $E \in \text{孕}(X)$, $\text{酞}_\epsilon = \text{酞}_\epsilon(R)$, 则 $[\text{酞} \supset R_\epsilon^\sigma(R)] = 1$

证明: 由定理 3.7 $[\text{酞}_\epsilon(R) \equiv R_\epsilon^\sigma(R)] = 1$, 又由定理 3.3 $[\text{酞} \supset \text{酞}_\epsilon(R)] = 1$, 所以 $[\text{酞} \supset R_\epsilon^\sigma(R)] = 1$.

参 考 文 献

- 1 Ying Mingshen. A new approach for fuzzy topology (I). Fuzzy Sets and Systems. 1991, (39):303~321
- 2 Halmos P R. Measure Theory. D. Van Nostrand. New York, 1950.19~29
- 3 吴从炘, 马 明. 模糊分析学基础. 北京: 国防工业出版社, 1991.24~25
- 4 Butnariu D. Additive fuzzy measure and integrals I. JMAA. 1983, 93(2):436~452

Fuzzifying Classes of Sets

Qiu Daowen

Dept. of Mathematics and Physics, GDUT, Guangzhou, 510090

Abstract Some of concepts, such as fuzzifying ring (algebra), δ -ring (δ -algebra) and monotone class are introduced. Some of their properties are established.

Key words fuzzy logic; ring; δ -ring; monotone class